关于曲线凹凸性教学中的若干定理与性质

潘朝毅

（成都师范学院 数学学院，成都 611130）*

摘　要：相较同济版高等数学教材，运用 Taylor 公式极简洁地导出凹凸判定定理和重要性质，并且给出了一个易于使用的凹凸判定充要条件和推论，最后例举了相关应用。

关键词：凹凸性；Tayloy 公式；充要条件

doi：10.3969/**j.issn.**2095－5642**.**2017**.**05**.**111

中图分类号：O071　　**文献标志码：**A　　**文章编号：**2095-5642(2017)05-0111-04

《 》[1]

( ) :

1: $f(x)$ I , I x_1 x_2 $f(\frac{x_1+x_2}{2})<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$,

$f(x)$ I ( ) ( ); $f(\frac{x_1+x_2}{2})>\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$, $f(x)$ I

( ) ( )。

[1] :

1: $f(x)$ [a,b] , (a,b) , ① (a,b) $f''(x)>0$,

$f(x)$ [a,b] ;② , 。

[1] ,

( ) 。

, Taylor :

:① $x_0=\frac{x_1+x_2}{2}$,

$$f(x_1)=f(x_0)+f'(x_0)(x_1-x_0)+\frac{f''(\xi_1)}{2}(x_1-x_0)^2,$$ ξ_1 x_0 x_1 ,

$$f(x_2)=f(x_0)+f'(x_0)(x_2-x_0)+\frac{f''(\xi_2)}{2}(x_2-x_0)^2,$$ ξ_2 x_0 x_2 ,

$$f(x_1)+f(x_2)=2f(x_0)+\frac{f''(\xi_1)+f''(\xi_2)}{2}(x_2-x_0)^2>2f(x_0)$$

$f(\frac{x_1+x_2}{2})<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$, $f(x)$ [a,b] ;

* **收稿日期：**2017-01-09

基金项目：成都师范学院校级科研项目(CJYKT09－025)

作者简介：潘朝毅(1965—)，男，四川成都人，副教授，硕士，研究方向：计算方法。

② 。 。

[1] ， （

， ）：

1： $f(x)$ I $f''(x)>0$， $\lambda\in(0,1)$

$f[\lambda x_1+(1-\lambda)x_2]<\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$

2： $f(x)$ I $f''(x)>0$， $t_i>0,\sum_{i=l}^{n}t_i=1$

$f(t_1x_1+t_2x_2+\cdots+t_nx_n)<t_1f(x_1)+t_2f(x_2)+\cdots+t_nf(x_n)$

： $x_0=t_1x_1+t_2x_2+\cdots+t_nx_n$， $i=1,2,\cdots,n$

$f(x_i)=f(x_0)+f'(x_0)(x_i-x_0)+\frac{f''(\xi_i)}{2}(x_i-x_0)^2$， ξ_i x_0 x_i

$t_if(x_i)=t_if(x_0)+f'(x_0)(t_ix_i-t_ix_0)+\frac{t_if''(\xi_i)}{2}(x_i-x_0)^2$

$\sum_{i=l}^{n}t_if(x_i)=f(x_0)\sum_{i=l}^{n}t_i+f'(x_0)(\sum_{i=l}^{n}t_ix_i-x_0\sum_{i=l}^{n}t_i)+\frac{1}{2}\sum_{i=l}^{n}t_if''(\xi_i)(x_i-x_0)^2$

$=f(x_0)+\frac{1}{2}\sum_{i=l}^{n}t_if''(\xi_i)(x_i-x_0)^2$

$>f(x_0)=f(t_1x_1+t_2x_2+\cdots+t_nx_n)$。 。

1 2 ， $f(\frac{x_1+x_2}{2})<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ ， ，

1′： $f(x)$ I ， I x_1 x_2 $\lambda\in(0,1)$， $f(\frac{x_1+x_2}{2})<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$， $f[\lambda x_1+(1-\lambda)x_2]<\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$。

[2] 1 ：

2： $f(x)$ I ， I x_1 x_2 $\lambda\in(0,1)$， $f[\lambda x_1+(1-\lambda)x_2]<\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$， $f(x)$ I 。

2 1 ， ， 1 2 ， [2]。 2 1 ， （ Jensen ）， 1 ， 。 ， （ ） ， Tayloy 1 ， 。

$y=x^4$ ， $(-\infty,+\infty)$ ， ， 1 。 ， ，

2 $f(x)$ I ， $f(x)$ I $f'(x)$ I 。

： $f'(x)$ I ， I $x_1<x_2$， $x_0=\frac{x_1+x_2}{2}$，

$f(x_1)=f(x_0)+f'(\xi_1)(x_1-x_0)$， ξ_1 x_0 x_1 ，

$f(x_2)=f(x_0)+f'(\xi_2)(x_2-x_0)$， ξ_2 x_0 x_1 ，

$f(x_1)+f(x_2)=2f(x_0)+[f'(\xi_2)-f'(\xi_1)](x_2-x_0)>2f(x_0)$

$f(\frac{x_1+x_2}{2})<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$， $f(x)$ I ；

, $f(x)$ I , I $x_1<x_2$,

$n\geq 3$ $x_n=\frac{x_{n-1}+x_1}{2}$, x_1 $\{x_n\}$,

$$\frac{f(x_n)-f(x_1)}{x_n-x_1}<\frac{\frac{f(x_{n-1})+f(x_1)}{2}-f(x_1)}{x_n-x_1}=\frac{f(x_{n-1}-f(x_1)}{2(x_n-x_1)}=\frac{f(x_{n-1}-f(x_1)}{x_{n-1}-x_1}$$

$$f'(x_1)=\lim_{x\to x_1}\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}=\lim_{n\to\infty 1}\frac{f(x_n)-f(x_1)}{x_n-x_1}<\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

$$f'(x_2)>\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

$f'(x_1)<f'(x_2)$, $f'(x)$ I 。 。

[3]-[4],

3: $y=f(x)$, I ,

, $f(x)$ I 。

1: $f(x)$ I , 1 3 。

: $f(x)$ I , 2, 1 ,

$M_0(x_0,f(x_0))$, $x^*\neq x_0$

$f(x^*)=f(x_0)+f'(\xi)(x^*-x_0)>f(x_0)+f'(x_0)(x^*-x_0)$, ξ x^* x_0 ,

I $y=f(x)$ M_0 $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$;

, $y=f(x)$, I $x_1<x_2$, $M_1(x_1, f(x_1))$ $M_2(x_2,f(x_2))$ M_1M_2 M_1 , M_2 , $f'(x_1)<k_{M_1M_2}<f'(x_1)$, 2 。 。

2: $f(x)$ I ,$f(x)$ I , I $x_1<x_2<x_3$,

$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}<\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$。

: I $x_1<x_2<x_3$,

$f(x_2)=f(x_1)+f'(\xi_1)(x_2-x_1)$, $x_1<\xi_1<x_2$,

$f(x_3)=f(x_2)+f'(\xi_2)(x_3-x_2)$, $x_2<\xi_2<x_3$,

$\xi_1<\xi_2$, 2, $f'(\xi_1)<f'(\xi_2)$。 。

, ,

( ) ( ) 。

1 $f(x)$ $[0,+\infty)$, $(0,+\infty)$, $f''(x)<0$。 $f(0)=0$, $0<x_1<x_2$ $f(x_1+x_2)<f(x_1)+f(x_2)$

: , [5] 。 ,

$h_2=f(x_1+x_2)-f(x_2)<h_1=f(x_1)-f(0)$,

2 。 。

2[6](1985) $f(x)$ $[0,+\infty)$,$f(0)=0$ $f'(x)$ $[0,+\infty)$ 。 $\frac{f(x)}{x}$ $[0,+\infty)$ 。

: , , $y=f(x)$

。 2 $f(x)$ $[0,+\infty)$, $0<x_1<x_2$ $\lambda=\frac{x_1}{x_2}$,

$y=f(x)$ $M_2(x_2, f(x_2))$, $\frac{f(x_1)}{x_2}=\frac{f[(1-\lambda)0+\lambda x_2]}{x_1}>\frac{(1-\lambda)f(0)+\lambda f(x_2)}{x_1}=\frac{\lambda f(x_2)}{\lambda x_2}=\frac{f(x_2)}{x_2}$。

参考文献：

[1] 同济大学数学系. 高等数学(第七版)上册[M].北京:高等教育出版社,2014.

[2] 华罗庚. 高等数学引论(第一册)[M].北京:高等教育出版社,2009:199.

[3] 龚昇,张生雷. 简明微积分(第三版)[M].安徽:中国科学技术大学出版社,1997:107.

[4] 同济大学数学系. 高等数学(本科少学时类型)(第三版)上册[M].北京:高等教育出版社,2014:172.

[5] 赵旭波,李小平.利用微分学证明不等式的几种典型证法[J].高等数学研究,2016,19(5):5-6.

[6] 刘晓波.一道研究生入学试题的研究[J].高等数学研究,2016,19(5):15-17.

On Some Theorems and Properties of the Concavity and Convexity

PAN Chao-yi

(School of Mathematics, Chengdu Normal University, Chengdu 611130, China)

Abstract: Compared to the widely used text book of Advanced Mathematics published by Tongji University Press, this paper uses Taylor formula to simplify the concavity and convexity decision theorems and its important properties, presents a necessary and sufficient condition for easy application of the concavity and convexity decision theorems and deduction, and finally discusses the relative applications by giving examples.

Key words: concavity and convexity; Taylor formula; necessary and sufficient condition

(实习编辑:杨晓玲 责任校对:曲 比)